УДК 532.54:518.12:532.135

СТЕКАНИЕ ПЛЕНКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ ПО БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

А.Н. Козлобродов

Томский государственный архитектурно-строительный университет
E-mail: vak@ultranet.tomsk.ru

На основе реологической модели В.Н. Покровского, описывающей поведение наполненных полимерных систем, рассматривается задача о стекании пленки нелинейной вязкоупругой жидкости по боковой поверхности вертикального цилиндра. Приводится математическая постановка задачи, методика ее решения, обсуждаются результаты расчета и анализируются факторы, оказывающие влияние на процесс стекания пленки.

Введение

Пленочные течения реологически сложных жидкостей встречаются во многих отраслях современного производства – химической технологии, энергетике, транспортировке нефтепродуктов и др. Для нанесения на детали и изделия различных покрытий и смазок используют методы макания и окунания. При быстром опорожнении сосудов и резервуаров различного назначения на их стенках остаются пленки жидкости, постепенно стекающие вниз. Поэтому важно определить характеристики таких пленок (толщину, расход, время стекания, оставшееся на стенке покрытие) в зависимости от реологических характеристик жидкости [1].

В большинстве случаев реальные материалы, находящиеся в вязкотекучем состоянии, обладают ярко выраженными неньютоновскими свойствами, такими, как нелинейная вязкость, пластичность и вязкоупругость. Неправильный учет влияния реологических факторов на движение пленок при эксплуатации различных технологических устройств приводит к существенным ошибкам в расчете.

При теоретическом описании технологических процессов переработки наполненных полимеров встает вопрос о локальных законах течения, учитывающих существенные реологические особенности материала. Имеющиеся теории течения часто основываются на модели нелинейной вязкой или вязкопластичной жидкости. Такое описание часто оказывается недостаточно полным и не включает очень существенных, обнаруженных на опыте, нелинейных эффектов, связанных с наличием релаксационных процессов в жидкости, таких, как появление нормальных напряжений при сдвиге и возникновение остаточных напряжений при остановке течения, разбухание струи при выходе из формующей головки и навивки жидкости на вращающейся стержень (эффект Вейсенберга) и др. [2–5].

1. Постановка задачи

Для описания поведения реологически сложных жидкостей не существует универсальных определяющих уравнений, пригодных, с одной стороны, для всех нелинейных материалов, и с другой – удовлетворительно работающих в широком диапазоне скоростей сдвига. Нелинейные эффекты определяются спецификой материала, и это надо учитывать при формулировке реологических уравнений динамики жидкости. Одной из реологических моделей, достаточно хорошо описывающей поведение наполненных полимерных систем на основе линейных полимеров, является модель, предложенная В.Н. Покровским [6].

В соответствии с этой моделью система уравнений движения линейных полимеров, кроме обычных уравнений движения в напряжениях и уравнения неразрывности, содержит совокупность уравнений, состоящую из определения девиатора тензора напряжений

$$\sigma_{ij} = 3\frac{\eta_0}{\tau_0}\left(\xi_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right) \tag{1}$$

и релаксационного уравнения

$$\frac{d\,\xi_{ij}}{d\,t} = -\frac{1}{\tau}\left(\xi_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right) + \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\xi_{kj} + \frac{\partial v_j}{\partial x_k}\xi_{kj}\,, \tag{2}$$

где x_i – декартовы координаты, ξ_{ij} – внутренний параметр, определяющий меру деформации макромолекулярных клубков, t – время, v_i – скорость, δ_{ij} – единичный тензор, σ_{ij} – девиатор тензора напряжений, k – текущее значение индекса, по которому выполняется суммирование, τ и η – время релаксации и сдвиговая вязкость, которые предполагаются зависящими от приложенных напряжений, причем выполняется соотношение [6]

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{\tau}{\tau_0} = f(D),\;\; D = \sigma_{ii} + 3p, \tag{3}$$

где τ_0 и η_0 – начальные вязкость и время релаксации при D=0, p – давление. Реологические свойства жидкости в этой модели определяются значениями параметров τ_0 и η_0, а также некоторой монотонно убывающей функцией $f(D)$, которая определяется по экспериментальным данным и для линейных полимеров может быть аппроксимирована, например, функцией [6]

$$f(D) = 1/(1 + kD)^n, \tag{4}$$

где k – коэффициент, изменяющийся в интервале 0,1...0,2; n – показатель нелинейности.

Рассмотрим задачу о стекании пленки нелинейной вязкоупругой жидкости, удовлетворяющей модели В.Н. Покровского, по боковой поверхности вертикально расположенного прямого кругового цилиндра (рис. 1).

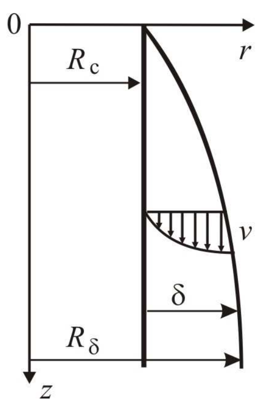


Рис. 1. *Геометрическая схема течения пленки: r , z – цилиндрические координаты; R_c – радиус цилиндра; δ – толщина стекающего слоя жидкости; R_δ=R_c+δ – расстояние до свободной поверхности*

Полагаем, что течение пленки является установившимся, ламинарным, и безволновым. Боковая поверхность цилиндра поддерживается при постоянной температуре $t=t_0$, а температура окружающей среды $t=t_ж$. В этом случае необходимо учитывать кривизну орошаемой стенки. Ясно, что капиллярные силы, обусловленные поперечной кривизной, малы для цилиндров большого радиуса. Ван Россум [7] установил, что если число Гоугера, которое определяется как

$$\mathrm{Go} = R_c(\rho g/(2\sigma))^{\frac{1}{2}} \qquad (5)$$

больше 1,8, то капиллярными силами в расчетах можно пренебречь.

В соотношении (5) ρ – плотность жидкости; g – ускорение силы тяжести; σ – коэффициент поверхностного натяжения.

Из общих соображений следует, что при больших значениях обобщенного числа Прандтля, характерных для всех реологически сложных жидкостей, вблизи орошаемой поверхности должен образовываться эффективный температурный слой, где происходит основное изменение температурного поля. В этом слое температура вдоль пленки изменяется гораздо медленнее, чем в ее поперечном направлении. Поэтому при решении системы уравнений, описывающих процесс стекания пленки в условиях теплообмена, воспользуемся гипотезой квазистационарности, т. е. будем считать, что каждому мгновенному распределению температур в данный момент времени соответствует свое стационарное распределение скоростей. Такое допущение позволяет решать гидродинамическую и тепловую задачу раздельно.

Таким образом, с учетом сделанных предположений, для решения поставленной задачи необходимо решить систему уравнений, записанных в цилиндрической системе координат (z,r,φ), и состоящую из уравнения движения

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}(r\tau_{zr}) + \rho g = 0, \qquad (6)$$

определяющих уравнений, полученных на основе модели В.Н. Покровского, ур. (1–4), и связывающих компоненты девиатора тензора напряжений с градиентом скорости, которые в данном случае принимают вид:

$$\sigma_{zr} = \eta_0 \Big/ (1 + k\tau_0/\eta_0\sigma_{zz})^n \frac{\partial v_z}{\partial r}, \qquad (7)$$

$$\sigma_{zz} = 2\tau_0\sigma_{zr} \Big/ (1 + k\tau_0/\eta_0\sigma_{zz})^n \frac{\partial v_z}{\partial r}, \qquad (8)$$

и уравнения энергии $v_z\frac{\partial t}{\partial z} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r}\right)$, (9)

где a – коэффициент температуропроводности жидкости.

Уравнения (6–9) решаются при условии, что на боковой поверхности цилиндра выполняются условия прилипания, а температура стенки постоянна

$$\left.\begin{matrix} v_z = 0 \\ t = t_0 \end{matrix}\right\} \text{при } r = R_c, \qquad (10)$$

а на свободной поверхности пленки ($r=R_\delta$) задаются условия отсутствия касательного напряжения σ_{zr} и теплового потока q, определяемого по закону Фурье

$$\left.\begin{matrix} \sigma_{zr} = 0, \\ q = -\lambda\dfrac{\partial t}{\partial r} = 0 \end{matrix}\right\} \text{при } r = R_\delta. \qquad (11)$$

Выбирая в качестве масштаба длины радиус цилиндра – $r=R_c$, скорости – среднерасходную скорость стекания – $v=U$ и температуры – разность между температурой стенки цилиндра t_0 и начальной температурой жидкости $t_ж$, запишем исходную систему уравнений (7–9) и граничные условия (10, 11) в безразмерной форме:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{zr}) + \mathrm{Re}/Fr = 0, \qquad (12)$$

$$\sigma_{zr} = 1/(1 + k\mathrm{We}\sigma_{zz})^n \frac{\partial v_z}{\partial r}, \qquad (13)$$

$$\sigma_{zz} = 2We\cdot\sigma_{zr}/(1 + kWe\sigma_{zz})^n \frac{\partial v_z}{\partial r}, \qquad (14)$$

$$v_z\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{1}{\mathrm{Pe}}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r}\right), \qquad (15)$$

$$v_z = 0,\ \ \theta = 1 \text{ при } r = 1, \qquad (16)$$

$$\sigma_{zr} = 0,\quad \frac{\partial\theta}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 1 + \Delta, \qquad (17)$$

где $\theta = \dfrac{t - t_ж}{t_0 - t_ж}$ – безразмерная температура; $\Delta=\delta/R_c$ – безразмерная толщина пленки; $\mathrm{Re}=\rho UR_c/\eta_0$ – число Рейнольдса; $\mathrm{Fr}=U^2/(gR_c)$ – число Фруда; $\mathrm{We}=\tau_0 U/R_c$ – число Вейсенберга; $\mathrm{Pe}=UR_c/a$ – число Пекле.

Отношение числа Рейнольдса к числу Фруда, входящее в (12), представляет важный с гидродинамической точки зрения критерий подобия, который обозначается через W=Re/Fr [8].

Найдем решение гидродинамической задачи.

Нетрудно показать, что, используя уравнения (12–14) и первое из граничных условий (17), можно найти выражение для касательного напряжения σ_{zr}

$$\sigma_{zr} = \frac{\mathrm{W}}{2r}[(1+\Delta)^2 - r^2] \qquad (18)$$

и получить связь между градиентом скорости и компонентой тензора напряжений σ_{zr} в виде

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \sigma_{zr}(1 + 2k\mathrm{We}^2\sigma_{zr}^2)^n. \qquad (19)$$

Подставляя выражение (18) в (19), получим нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка для определения профиля скорости по толщине пленки. Поскольку v_z является функцией только от r, то частную производную $\frac{\partial v_z}{\partial r}$ можно заменить на полную.

$$\frac{dv_z}{dr} = \frac{\mathrm{W}}{2r}[(1+\Delta)^2 - r^2]\times$$
$$\times\left(1 + \frac{k}{2r^2}\mathrm{We}^2\mathrm{W}^2[(1+\Delta)^2 - r^2]^2\right)^n. \qquad (20)$$

В виду нелинейности дифференциального уравнения (20) получить его аналитическое решение не представляется возможным. Поэтому это уравнение решается численно с использованием первого из граничных условий (16). Уравнение энергии, записанное в виде (15), также решается численно с использованием поля скорости, полученного из решения уравнения (20).

2. Результаты расчета

Проведенные численные эксперименты позволили выяснить влияние параметров течения и реологических характеристик жидкости на профили скоростей и температур, а также установить их влияние на толщину стекающей пленки Δ при заданных значениях объемного расхода. Для определения величины Δ строился итерационный процесс с использованием соотношения

$$Q = 2\pi \int_1^{1+\Delta} r v_z(r)\,dr.$$

На рис. 2 представлена зависимость толщины стекающего слоя вязкоупругой жидкости от числа Вейсенберга при различных значениях параметра W.

Из представленного рисунка видно, что толщина пленки уменьшается как с увеличением числа We, так и с увеличением параметра W. При этом с ростом We толщина пленки стремится к некоторому стационарному значению.

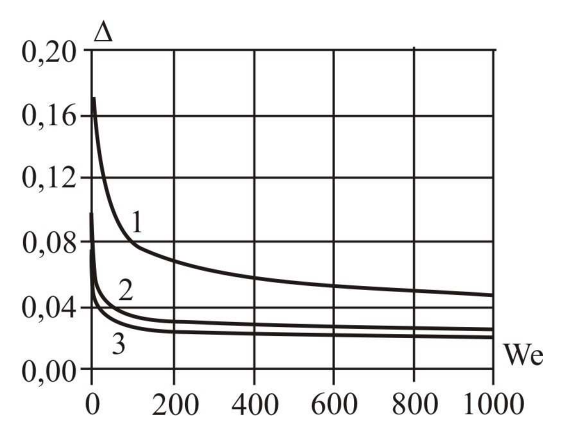


Рис. 2. *Зависимость толщины слоя от числа We при различных значениях W: 1) 5; 2) 50; 3) 100*

Зависимость значения максимальной скорости в том же диапазоне изменения параметров We и W показана на рис. 3.

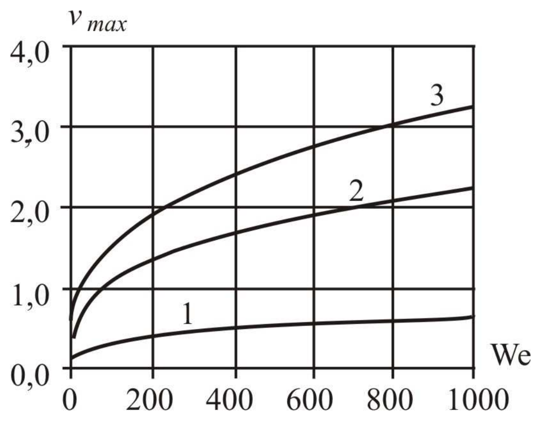


Рис. 3. *Зависимость максимальной скорости от числа We при различных значениях W: 1) 5; 2) 50; 3) 100*

Представленные результаты расчета показывают, что если толщина пленки с ростом параметров We и W падает, то максимальное значение скорости, которое достигается на свободной поверхности пленки, растет. Рис. 4 иллюстрирует распределение скорости по толщине пленки в зависимости от числа Вейсенберга (We).

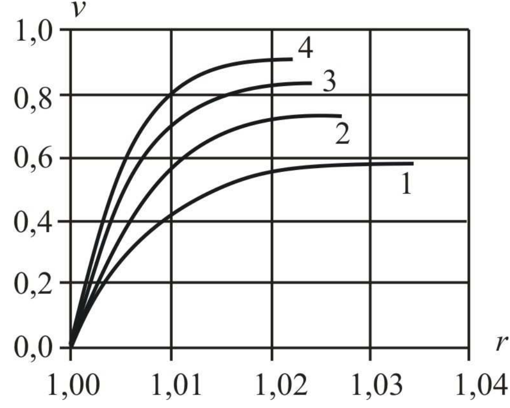


Рис. 4. *Распределение скорости по толщине пленки в зависимости от We: 1) 50; 2) 100; 3) 150; 4) 200*

Как видно из рисунка, повышение числа Вейсенберга приводит к заметному увеличению скорости. В то же время представленный рисунок еще раз показывает, что с ростом We толщина стекающего слоя уменьшается. Распределение скорости для вязкоупругой жидкости зависит и от геометрических размеров или радиуса цилиндра, по которому стекает жидкость. Как показали численные эксперименты, увеличение радиуса цилиндра при условии сохранения постоянного значения объемного расхода приводит к понижению максимальной скорости и к уменьшению толщины стекающей пленки.

В отличие от нелинейной вязкой и вязкопластичной жидкости при течении вязкоупругой жидкости нормальная компонента девиатора тензора напряжений не равна нулю. При этом величина напряжения существенным образом зависит от числа We:

$$\sigma_{zz} = 2\mathrm{We}\sigma_{zr}^2.$$

На рис. 5 показаны результаты расчета нормального напряжения σ_{zz} по толщине пленки в зависимости от числа We. Из представленного рисунка следует, что распределение нормального напряжения по толщине пленки носит нелинейный характер, и с увеличением числа We максимальное значение нормального напряжения, которое достигается на стенке цилиндра, растет.

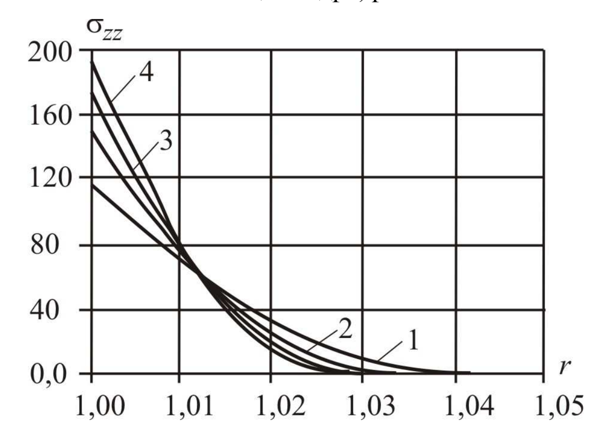


Рис. 5. *Распределение нормального напряжения по толщине пленки в зависимости от числа We: 1) 50; 2) 100; 3) 150; 4) 200*

Поскольку при уменьшении We толщина слоя стекающей жидкости увеличивается, кривая распределения нормального напряжения принимает все более пологий характер.

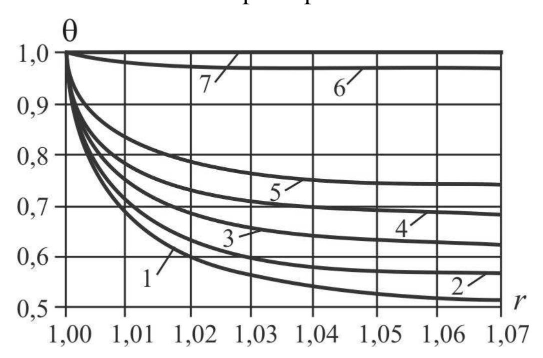


Рис. 6. *Распределение температуры по толщине пленки в зависимости от числа Pe в сечениях: z = 0,14 – 1) 0,0001; 2) 5; 3) 10; 4) 20; 5) 25; z = 0,75 – 6) 0,0001; 7) 20*

Численное исследование поля температур показало, что при выбранных значениях чисел $\mathrm{Re}=5\cdot10^{-4}$, $\mathrm{Fr}=3\cdot10^{-7}$ и числа Пекле (Pe), указанного на рис. 6, число Прандтля принимает действительно большие значения. Из представленного рисунка видно, что вблизи орошаемой поверхности образуется температурный слой, в котором происходит основное изменение температурного поля. При этом толщина этого слоя занимает примерно третью часть от толщины стекающего слоя вязкоупругой жидкости. В этом слое температура вдоль пленки изменяется гораздо медленнее, чем в ее поперечном направлении, и с увеличением числа Pe наблюдается уменьшение градиента температуры по толщине пленки.

3. Выводы

Получено численное решение задачи о стекании пленки нелинейной вязкоупругой жидкости по боковой поверхности вертикального цилиндра. Показано влияние параметров течения и реологических характеристик жидкости на профили скоростей и температур, а также установлено их влияние на толщину стекающей пленки при заданных значениях объемного расхода. Установлено, что вблизи орошаемой поверхности образуется температурный пограничный слой, в котором происходит основное изменение температурного поля. Толщина этого слоя занимает примерно третью часть от толщины стекающего слоя вязкоупругой жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шульман З.П., Байков В.П. Реодинамика и теплообмен в пленочных течениях. – Минск: Наука и техника, 1979. – 296 с.
2. Чанг Дей Хан. Реология в процессах переработки полимерных материалов. – М.: Химия, 1979. – 368 с.
3. Ферри Д. Вязкоупругие свойства полимеров. – М.: Химия, 1963. – 235 с.
4. Лурье М.В., Михайлов В.М. Расчет времени стекания пленки вязкого нефтепродукта с внутренней поверхности котлов транспортных цистерн // Известия вузов. Нефть и газ. – 1977. – № 4. – С. 77–80.
5. Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. – М.: Мир, 1978. – 309 с.
6. Покровский В.Н. Статистическая механика разбавленных суспензий. – М.: Наука. 1978. – 136 с.
7. Van Rossum I.N. Study of wave inception of falling liquid films // J. Appl. Sci. Res. – 1958. – V. 47. – № 121. – P. 125–132.
8. Козлобродов А.Н., Шрагер Г.Р. Анализ напряженного состояния поверхностного слоя полимерной массы при заполнении крупногабаритных пресс-форм // Механика композитных материалов. – 2001. – № 4. – С. 559–575.

Поступила 21.06.2006 г.